Soal dan Solusi
Pentatic Mathematics Competition I
Jenjang SMP/MTs

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Petunjuk : Kerjakan soal-soal berikut dengan jujur agar mendapatkan manfaat yang maksimal. Jawaban setiap soal dipastikan bilangan cacah. Jawab soal-soal berikut tanpa menuliskan satuan, koma (,), dan lain-lain.

---

1. Andi akan membagikan 10 permen kepada Wildan dan Bagus dimana setiap anak mendapatkan setidaknya 1 permen. Peluang Wildan mendapatkan minimal 5 permen dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana a dan b bilangan asli dengan $FPB(a, b) = 1$. Tentukan $a + b$. **(1 poin)**

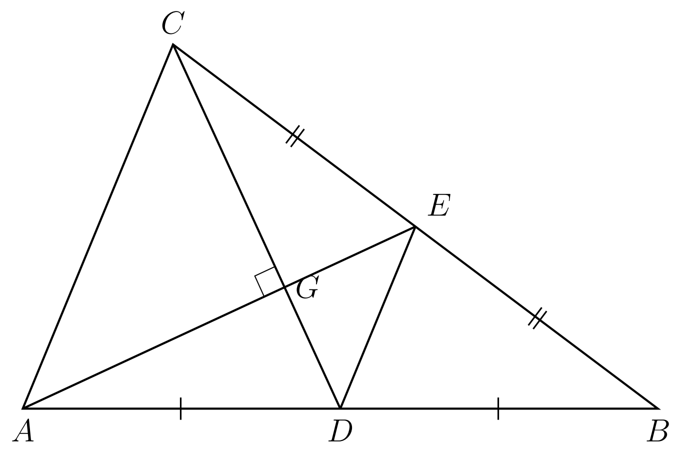
   Jawab: $\boxed{\textbf{14}}$

   Misalkan w dan b berturut-turut menyatakan banyak permen yang diterima Wildan dan Bagus. Demikian $w + b = 10$. Karena $w \geq 5$, maka $(w, n) = (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)$ yang berarti ada 5 kemungkinan. Total seluruh kemungkinan ada 9, yaitu $(w, n) = (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 5), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)$. Demikian peluangnya adalah $\frac{5}{9}$. Demikian $a = 5$ dan $b = 9$ yang berarti $a + b = 5 + 9 = \boxed{14}$.

---

2. Diberikan $\triangle ABC$. Titik D dan E berturut-turut titik tengah AB dan BC serta AE dan CD berpotongan di titik G. Diketahui bahwa $\angle AGC = 90°$. Jika panjang $AB = 2\sqrt{15}$ dan panjang $BC = 2\sqrt{5}$, maka tentukan $9DG^2$. **(2 poin)**

   Jawab: $\boxed{\textbf{3}}$



Karena D dan E berturut-turut titik tengah AB dan BC, maka AE dan CD masing-masing garis berat $\triangle ABC$. Perhatikan bahwa G merupakan titik berat* $\triangle ABC$. Akibatnya, perbandingan panjang $CG : GD = 2 : 1$ dan $AG : GE = 2 : 1$. Misalkan panjang $GD = x$ dan $GE = y$. Maka panjang $CG = 2x$ dan $AG = 2y$. Perhatikan bahwa panjang $AD = DB = \sqrt{15}$ dan $BE = CE = \sqrt{5}$. Pada $\triangle ADG$, dengan phytagoras diperoleh

$$AG^2 + GD^2 = AD^2 \Longrightarrow 4y^2 + x^2 = 15 \tag{1}$$

Pada $\triangle GEC$, dengan phytagoras diperoleh

$$CG^2 + GE^2 = CE^2 \Longrightarrow 4x^2 + y^2 = 5 \tag{2}$$

Jumlahkan persamaan (1) dan (2), didapatkan $5x^2 + 5y^2 = 20$ yang setara dengan $x^2 + y^2 = 4$. Kurangi persamaan (2) dengan $x^2 + y^2$, diperoleh

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 - x^2 - y^2 &= 5 - 4 \\ 3x^2 &= 1 \\ 9x^2 &= 3 \end{aligned}$$

Demikian $9DG^2 = \boxed{3}$.

---

3. Tentukan jumlah semua nilai m yang mungkin sehingga terdapat pasangan bilangan asli (a, b) yang memenuhi persamaan

$$\begin{aligned} a + 3b &= m \\ a + b &= 100 \end{aligned}$$

(2 poin)

Jawab: $\boxed{\mathbf{19800}}$

Jelas m merupakan bilangan asli. Kurangkan kedua persamaan, diperoleh

$$\begin{aligned} a + 3b - a - b &= m - 100 \\ 2b &= m - 100 \\ b &= \frac{m - 100}{2} \end{aligned}$$

Demikian haruslah m genap dan $m > 100$. Subtitusikan ke $a + b = 100$, diperoleh

$$a = 100 - b = 100 - \frac{m - 100}{2} = \frac{300 - m}{2}$$

Demikian m harus genap dengan $m < 300$. Dapat disimpulkan bahwa m bilangan genap dengan $100 < m < 300$. Demikian jumlah semua nilai m yang memenuhi adalah

$$102 + 104 + 106 + \cdots + 298 = \frac{99}{2}(102 + 298) = \frac{99}{2} \cdot 400 = \boxed{19800}$$

---

*Titik berat adalah titik perpotongan ketiga garis berat suatu segitiga

4. Jika $a^2+b^2=32$ dan $a+b=8$, tentukan nilai $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. **(1 poin)**

Jawab: $\boxed{4}$

Kuadratkan kedua ruas dari $a+b=8$, maka

$$\begin{aligned} a^2+b^2+2ab &= 64 \\ 32+2ab &= 64 \\ ab &= 16 \end{aligned}$$

Tinjau bahwa

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{8+2\sqrt{16}}=\sqrt{8+2\cdot 4}=\sqrt{16}=4$$

meningat pasti $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 0$. Jadi, $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\boxed{4}$.

---

5. Diberikan bilangan asli a,b,c,d,e dengan $a<b<c<d<e$ dan $a+c=14$. Rata-rata dari lima bilangan tersebut adalah 9 serta $5b=3d$ dan $5b=2e$. Tentukan nilai maksimum dari $a+e$. **(1 poin)**

Jawab: $\boxed{20}$

Rata-rata dari lima bilangan a,b,c,d,e adalah 9. Maka

$$a+b+c+d+e=9\cdot 5=45$$

Karena $a+c=14$, maka $b+d+e=31$. Tinjau $5b=3d$ ekuivalen dengan $d=\frac{5}{3}b$ dan $5b=2e$ ekuivalen dengan $e=\frac{5}{2}b$. Maka

$$\begin{aligned} b+d+e &= 31 \\ b+\frac{5}{3}b+\frac{5}{2}b &= 31 \\ \frac{6+10+15}{6}b &= 31 \\ \frac{31}{6}b &= 31 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

Demikian $d=10$ dan $e=15$. Agar $a+e=a+15$ bernilai maksimum, maka a harus bernilai maksimum. Karena haruslah $a<b=6$, demikian $a=5$. Kita peroleh juga $c=9$ yang berarti $(a,b,c,d,e)=(5,6,9,10,15)$. Jadi, nilai maksimum $a+e$ adalah $5+15=\boxed{20}$.

---

6. Tentukan luas segiempat talibusur yang memiliki panjang sisi $2,5,5$, dan 10. **(2 poin)**

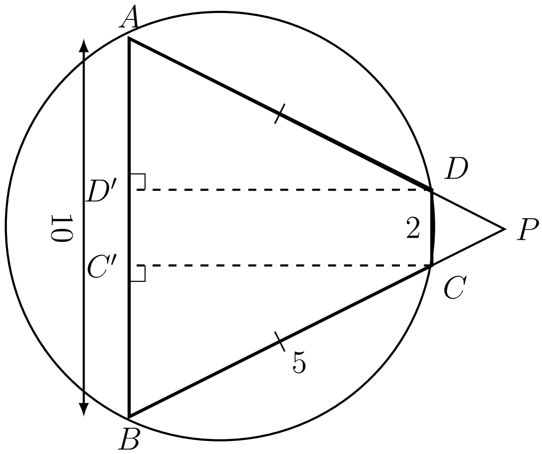
Solusi: $\boxed{18}$

Misalkan segiempat talibusur tersebut $ABCD$ dengan panjang $AB=10, BC=5, CD=2$, dan $DA=5$. Misalkan perpanjangan BC dan DA berpotongan di titik P. Karena $ABCD$ segiempat talibusur, berakibat

$$\angle DAB=\angle DCP \quad \text{dan} \quad \angle ABC=\angle CDP$$

Demikian $\triangle DAP$ sebangun dengan $\triangle BCP$. Misalkan panjang $PC=x$ dan $PB=y$. Kita peroleh bahwa

$$\frac{PD}{PB}=\frac{PA}{PC}\implies\frac{5+x}{y}=\frac{5+y}{x}$$



Dengan mengalikan silang, kita peroleh $5x + x^2 = 5y + y^2$. Maka

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 5x - 5y &= 0 \\ (x+y)(x-y) + 5(x-y) &= 0 \\ (x+y+5)(x-y) &= 0 \end{aligned}$$

Karena $x + y + 5 > 0$, maka haruslah $x = y$. Akibatnya, $\angle PDC = \angle PCD$ yang berakibat pula

$$\angle DAB = \angle DCP = \angle CBA = \angle CDP$$

Dapat disimpulkan bahwa AB sejajar dengan CD. Dengan kata lain, $ABCD$ merupakan trapesium samakaki. Misalkan DD' dan CC' garis tinggi (seperti pada gambar). Maka panjang $D'C' = DC = 2$ serta panjang $AD' = BC' = 4$. Dengan Phytagoras pada $\triangle ADD'$, maka

$$DD' = \sqrt{AD^2 - D'A^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$$

Demikian luas segiempat $ABCD$ adalah

$$[ABCD]^\dagger = \frac{AB + CD}{2} \cdot DD' = \frac{2 + 10}{2} \cdot 3 = \frac{12}{2} \cdot 3 = 18$$

Jadi, luas segiempat talibusur tersebut adalah $\boxed{18}$.

Solusil Alternatif. Luas dari segiempat talibusur yang memiliki panjang sisi a, b, c, d adalah

$$L = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

dimana $s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$. Untuk segiempat talibusur yang memiliki panjang sisi $2, 5, 5, 10$, maka $s = 11$. Demikian luas segiempat talibusur tersebut adalah

$$\sqrt{(11-2)(11-5)(11-5)(11-10)} = \sqrt{9 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1} = 3 \cdot 6 \cdot 1 = \boxed{18}$$

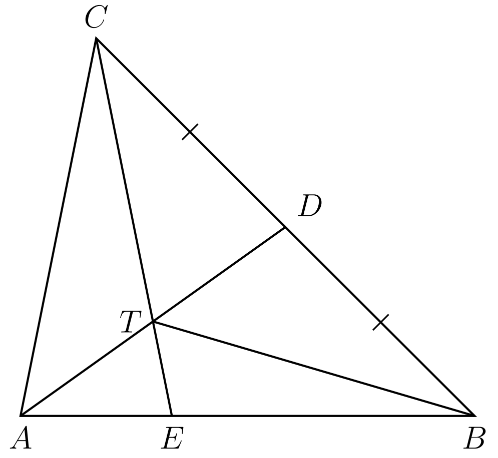
---

7. Diberikan $\triangle ABC$ dengan titik D dan E berturut-turut pada sisi BC dan AB. Titik D merupakan titik tengah BC dan $BE = 2AE$. Misalkan T merupakan perpotongan AD dan CE. Jika luas $\triangle ABC$ adalah 72, tentukan luas $BETD$. **(3 poin)**

   Jawab: $\boxed{30}$

   Misalkan $[BET] = x$ dan $[BTD] = y$ dimana $[BET]$ dan $[BTD]$ berturut-turut menyatakan luas $\triangle BET$ dan $\triangle BTD$.

† $[ABCD]$ menyatakan luas segiempat $ABCD$. Luas dari suatu bangun ditandai dengan dua kurung siku. Contohnya $[ABC]$ menyatakan luas ABC dan $[ABCDEF]$ menyatakan luas $ABCDEF$.



Perhatikan bahwa

$$\frac{AE}{BE} = \frac{[AET]}{[BET]} = \frac{[AEC]}{[BEC]} = \frac{[ATC]}{[BCT]}$$

Karena $BE = 2AE$, maka $\frac{AE}{BE} = \frac{1}{2}$. Demikian

$$[AET] = \frac{[BET]}{2} = \frac{x}{2}, \quad [BEC] = 2[AEC], \quad [ATC] = \frac{[BCT]}{2}$$

Tinjau bahwa

$$\frac{[BTD]}{[CTD]} = \frac{BD}{CD} = 1 \Longrightarrow [CTD] = [BTD] = y$$

Demikian $[BCT] = [CTD] + [BTD] = y + y = 2y$. Demikian $[ATC] = y$. Kita dapatkan $[ADC] = [ATC] + [TDC] = y + y = 2y$. Padahal

$$\frac{[ABD]}{[ADC]} = \frac{BD}{CD} = 1 \Longrightarrow [ABD] = [ADC]$$

Padahal $[ABD] + [ADC] = [ABC] = 72$ yang berarti $[ABD] = [ADC] = 36$. Di sisi lain, $[ADC] = 2y$ yang menyimpulkan $2y = 36$. Demikian $y = 18$. Tinjau juga bahwa $[ABD] = 36$. Padahal

$$[ABD] = [AET] + [BET] + [BTD] = \frac{x}{2} + x + y = \frac{3}{2}x + 18$$

Maka

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x + 18 &= 36 \\ \frac{3}{2}x &= 18 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Demikian $[BETD] = [BET] + [BTD] = x + y = 12 + 18 = \boxed{30}$.

---

8. Tentukan nilai minimum dari

$$\sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 6x + 130}$$

dengan x bilangan real. **(4 poin)**

Jawab: $\boxed{\mathbf{13}}$

Tinjau bahwa

$$N = \sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2-6x+130} = \sqrt{(x+2)^2+(-1+2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(-1-10)^2}$$

Misalkan titik $A(-2,-2), B(x,-1)$, dan $C(3,10)$ yang berarti $N = AB+BC$. Tinjau N akan bernilai minimum ketika A, B, C segaris. Demikian kita hanya perlu mencari jarak titik $A(-2,-2)$ dan $C(3,10)$. Maka

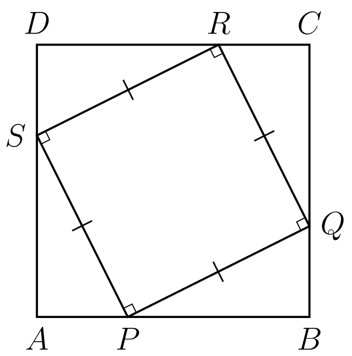
$$AB+BC \geq AC = \sqrt{(-2-3)^2+(-2-10)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

Sehingga haruslah kesamaan terjadi. Jadi, nilai minimum yang diminta adalah $\boxed{13}$.

---

9. Diberikan persegi $ABCD$ dengan panjang sisi 4. Titik P, Q, R, S berturut-turut pada sisi AB, BC, CD, DA sehingga $PQRS$ merupakan persegi. Tentukan luas minimum dari persegi $PQRS$. $\boxed{8}$ **(2 poin)**

   Jawab: $\boxed{\mathbf{8}}$



Tinjau bahwa $\angle APS = 90^\circ - \angle ASP$. Maka

$$\angle BPQ = 180^\circ - 90^\circ - \angle APS = 90^\circ - (90^\circ - \angle ASP) = \angle ASP$$

Demikian $\angle APS = \angle PQB$. Maka $\triangle PBQ$ kongruen dengan $\triangle ASP$. Dengan cara yang sama, kita simpulkan bahwa $\triangle BPQ, \triangle ASP, \triangle RDS$, dan $\triangle CQR$ kongruen. Misalkan panjang $AP = BQ = x$, demikian panjang $PB = 4-x$. Dengan phytagoras pada $\triangle PBQ$, maka

$$PQ^2 = PB^2 + BQ^2 = (4-x)^2 + x^2 = 16 - 8x + x^2 + x^2 = 2x^2 - 8x + 16$$

Padahal $[PQRS] = PQ^2 = 2x^2 - 8x + 16$. Nilai minimum $2x^2 - 8x + 16$ adalah

$$\frac{-D}{4a} = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4\cdot 2\cdot 16 - (-8)^2}{4\cdot 2} = \frac{128-64}{8} = \frac{64}{8} = 8$$

Demikian $[PQRS] = 2x^2 - 8x + 16 \geq 8$. Jadi, luas minimum persegi $PQRS$ adalah $\boxed{8}$.

---

10. Misalkan $S = \{1, 2, 3, \cdots, 40\}$. Himpunan bagian dari S disebut $n - Cov$ jika himpunan bagian dari S yang terdiri dari n anggota, tidak ada dua anggota dari n yang merupakan bilangan asli berurutan. Sebagai contoh, $\{1, 5, 9, 20\}$ merupakan $4 - Cov$, sedangkan $\{1, 5, 6, 20\}$ bukan. Tentukan banyak himpunan bagian dari S yang $4 - Cov$.

    (3 poin)

Jawab: $\boxed{\textbf{66045}}$

Misalkan himpunan bagian $4 - Cov$ dari S adalah $\{a, b, c, d\}$ dimana $a < b < c < d$. Demikian haruslah

$$x_1 = b - a \geq 2$$
$$x_2 = c - b \geq 2$$
$$x_3 = d - c \geq 2$$

Tinjau bahwa

$$a + x_1 + x_2 + x_3 = d \leq 40 \Longrightarrow a + x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$$

Karena $x_1, x_2, x_3 \geq 2$, misalkan $x_1 = x_1' + 1, x_2 = x_2' + 1$, dan $x_3 = x_3' + 1$ dengan x_1', x_2', x_3' bilangan asli. Sehingga

$$40 \geq a + x_1 + x_2 + x_3 = a + x_1' + 1 + x_2' + 1 + x_3' + 1 \Longrightarrow 37 \geq a + x_1' + x_2' + x_3'$$

Misalkan terdapat bilangan asli k sehingga $a + x_1' + x_2' + x_3' = 38 - k$ yang setara dengan $a + x_1' + x_2' + x_3' + k = 38$. Maka banyak solusinya ada

$$C_{5-1}^{38-1} = C_4^{37} = \frac{37!}{4!33!} = \frac{37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 66045$$

Demikian banyak himpunan bagian dari S yang $4 - Cov$ ada $\boxed{66045}$.

---

11. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat tak negatif (x, y) yang memenuhi

$$\frac{1}{y!} = 1 - \frac{1}{x!}$$

(1 poin)

Jawab: $\boxed{\textbf{1}}$

Persamaan pada soal setara dengan $x! + y! = x!y!$. Demikian

$$0 = x!y! - x! - y! \Longrightarrow 1 = (x! - 1)(y! - 1)$$

Tinjau $x! \geq 1$ dan $y! \geq 1$ sehingga $x! - 1 \geq 0$ dan $y! - 1 \geq 0$. Maka haruslah $x! - 1 = 1$ dan $y! - 1 = 1$ yang berarti $x! = y! = 2$. Demikian $(x, y) = (2, 2)$ yang satu-satunya memenuhi. Demikian banyaknya pasangan bilangan bulat tak negatif (x, y) yang memenuhi adalah $\boxed{1}$.

---

12. Misalkan semua pasangan bilangan asli (a, b) yang memenuhi persamaan

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{3}{4}$$

adalah $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \cdots, (a_n, b_n)$. Tentukan nilai dari

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \cdots + a_n + b_n$$

(1 poin)

Jawab: $\boxed{\textbf{33}}$

Soal ekuivalen dengan $4b + 8a = 3ab$. Sehingga $0 = 3ab - 4b - 8a$. Kalikan kedua ruas dengan 3,

$$0 = 9ab - 12b - 24a \Longrightarrow 32 = (3a - 4)(3b - 8)$$

Tinjau $3a - 4 \geq -1$ dan $3b - 8 \geq -5$. Misalkan $3a - 4 = m$ dan $3b - 8 = n$ dengan m, n bilangan bulat. Maka

$$a = \frac{m+4}{3} \quad \text{dan} \quad b = \frac{n+8}{3}$$

Demikian haruslah $m+4 \equiv 0 \pmod 3$ yang berarti $m \equiv 2 \pmod 3$ dan $n+8 \equiv 0 \pmod 3$ yang berarti $n \equiv 1 \pmod 3$.

- Jika $3a - 4 = 2$ dan $3b - 8 = 16$ sehingga $(a, b) = (2, 8)$.
- Jika $3a - 4 = 8$ dan $3b - 8 = 4$ sehingga $(a, b) = (4, 4)$.
- Jika $3a - 4 = 32$ dan $3b - 8 = 1$ sehingga $(a, b) = (12, 3)$.
- Untuk $m, n < 0$ tidak ada yang memenuhi.

Dapat kita tuliskan $(a_1, b_1) = (2, 8), (a_2, b_2) = (4, 4)$, dan $(a_3, b_3) = (9, 3)$. Demikian

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_n + b_n = 2 + 8 + 4 + 4 + 12 + 3 = \boxed{33}$$

---

13. Didefinisikan $\binom{x}{y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}$ untuk setiap bilangan bulat $x \geq y \geq 0$. Nilai dari

$$\binom{2020}{1} + \left[\binom{2020}{2018} + \binom{2021}{2018} + \binom{2022}{2018} + \cdots + \binom{4038}{2018}\right]$$

dapat dinyatakan dalam bentuk $\binom{a}{b}$. Tentukan nilai $a + b$. **(4 poin)**

Jawab: $\boxed{\textbf{6059}}$

Tinjau bahwa $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Demikian

$$\binom{i+2018}{2018} = \binom{i+2018}{i+2018-2018} = \binom{i+2018}{i}$$

Sehingga kita ingin mecari nilai dari

$$S = \binom{2020}{1} + \binom{2020}{2} + \binom{2021}{3} + \binom{2022}{4} + \cdots + \binom{4038}{2020}$$

Menurut identitas $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$,

$$\begin{aligned}
S &= \binom{2020}{1} + \binom{2020}{2} + \binom{2021}{3} + \binom{2022}{4} + \cdots + \binom{4038}{2020} \\
&= \binom{2021}{2} + + \binom{2021}{3} + \binom{2022}{4} + \cdots + \binom{4038}{2020} \\
&= \binom{2022}{3} + \binom{2022}{4} + \cdots + \binom{4038}{2020} \\
&= \binom{2023}{4} + \cdots + \binom{4038}{2020}
\end{aligned}$$

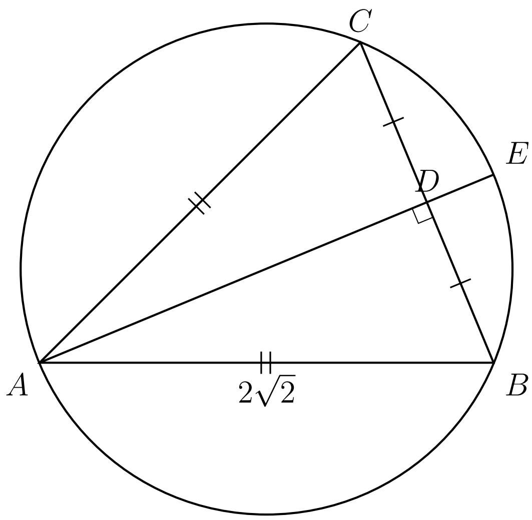
dan seterusnya sehingga kita peroleh $S = \binom{4039}{2020}$. Demikian $a = 4039$ dan $b = 2020$ yang berarti $a + b = \boxed{6059}$.

---

14. Diberikan $\triangle ABC$ lancip dengan luas $\sqrt{15}$ dan panjang $AC = AB = 2\sqrt{2}$. Titik D merupakan titik tengah sisi BC. Garis AD memotong lingkaran luar $\triangle ABC$ di titik E dengan $A \neq E$. Jika nilai dari DE^2 dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana a dan b bilangan asli dengan $FPB(a, b) = 1$, tentukan nilai $a + b$. **(4 poin)**

Jawab: $\boxed{\textbf{14}}$

Tinjau karena panjang $AC = AB$ dan D titik tengah sisi BC, maka $AD \perp BC$.



Misalkan panjang $BD = CD = x$. Dengan phytagoras, maka $AD = \sqrt{8 - x^2}$. Luas dari $\triangle ABC$ adalah $\sqrt{15}$. Maka

$$\sqrt{15} = x\sqrt{8 - x^2} \Longrightarrow 15 = 8x^2 - x^4$$

yang setara dengan

$$0 = x^4 - 8x^2 + 15 = \left(x^2 - 3\right)\left(x^2 - \sqrt{5}\right)$$

yang menyimpulkan $x = \sqrt{3}$ atau $x = \sqrt{5}$. Tetapi, untuk $x = \sqrt{5}$ berakibat $AB^2 + AC^2 < BC^2$ yang berarti $\triangle ABC$ merupakan segitiga tumpul. Sedangkan, untuk $x = \sqrt{3}$ berakibat $AB^2 + AC^2 > BC^2$ yang berarti $\triangle ABC$ segitiga lancip. Demikian $x = \sqrt{3}$. Menurut teorema *Power of Point*, maka

$$AD \cdot DE = CD \cdot DB \Longrightarrow \sqrt{5} \cdot DE = 3$$

sehingga $DE = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Maka $DE^2 = \frac{9}{5}$ yang berarti $a = 9$ dan $b = 5$. Demikian $a + b = \boxed{14}$.

---

15. Tentukan bilangan asli n terkecil sehingga $\frac{(2n)!}{n!n!}$ habis dibagi 97 dengan $n \geq 100$.

(2 poin)

Jawab: $\boxed{\textbf{146}}$

Misalkan $v_p(n)$ menyatakan bilangan asli k terbesar sehingga p^k habis membagi $n!$ untuk suatu bilangan prima p, maka

$$v_p(n) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots$$

Asumsikan $n < p^2$ dengan $p = 97$. Maka

$$v_{97}(n) = \left\lfloor \frac{n}{97} \right\rfloor$$

Andaikan juga $2n < 97^2$. Tinjau bahwa bilangan asli k terbesar sehingga 97^k habis membagi $\frac{(2n)!}{n!n!}$ dapat dinyatakan dengan

$$v_{97}(2n) - 2v_{97}(n) = \left\lfloor \frac{2n}{97} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{97} \right\rfloor$$

Sehingga agar $\frac{(2n)!}{n!n!}$ habis dibagi 97, maka haruslah $v_{97}(2n) - 2v_{97}(n) \geq 1$. Agar n bernilai minimum, ambil $v_{97}(2n) - 2v_{97}(n) = 1$. Demikian nilai yang mungkin diperoleh untuk $v_{97}(2n) = 3$ dan $v_{97} = 1$. Karena

$$\left\lfloor \frac{2n}{97} \right\rfloor = 3 \quad \text{dan} \quad \left\lfloor \frac{n}{97} \right\rfloor = 1$$

Maka

$$3 \leq \frac{2n}{97} < 4 \quad \text{dan} \quad 1 \leq \frac{n}{97} < 2$$

yang memberikan $291 \leq 2n < 388 \Longrightarrow 146 \leq n < 194$ dan $97 \leq n < 194$. Ambil $n = 146$, memenuhi sedangkan $n = 145$ tidak memenuhi. Demikian bilangan asli terkecil n yang memenuhi adalah $\boxed{146}$.

---

16. Tentukan sisa $51^{51^{51}}$ jika dibagi 100. **(3 poin)**

Jawab: $\boxed{\mathbf{51}}$

Tinjau $FPB(25, 4) = 1$, demikian sisa $51^{51^{51}}$ jika dibagi 100 sama saja dengan menyelesaikan

$$51^{51^{51}} \equiv r_1 \pmod{25} \quad \text{dan} \quad 51^{51^{51}} \equiv r_2 \pmod 4$$

dimana r_1, r_2 berturut-turut merupakan sisa pembagian $51^{51^{51}}$ terhadap 25 dan 4. Misalkan $s = 51^{51^{51}}$ Tinjau bahwa $51 \equiv 1 \pmod{25}$. Maka

$$s = 51^{51^{51}} \equiv 1^{51^{51}} \equiv 1 \pmod{25} \Longrightarrow s \equiv 1 \pmod{25}$$

Tinjau bahwa $51 \equiv -1 \pmod 4$. Maka

$$s = 51^{51^{51}} \equiv (-1)^{51^{51}} \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4 \Longrightarrow s \equiv 3 \pmod 4$$

Karena $s \equiv 1 \pmod{25}$, tuliskan $s = 25k + 1$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif. Karena $s \equiv 3 \pmod 4$, maka

$$\begin{aligned} s &\equiv 3 \pmod 4 \\ 25k + 1 &\equiv 3 \pmod 4 \\ k &\equiv 2 \pmod 4 \end{aligned}$$

Kita tuliskan $k = 4p + 2$ untuk suatu bilangan bulat p tak negatif. Demikian

$$s = 25k + 1 = 25(4p + 2) + 1 = 100p + 50 + 1 = 100p + 51 \equiv 51 \pmod{100}$$

Demikian sisa $s = 51^{51^{51}}$ jika dibagi 100 adalah $\boxed{51}$.

---

17. Tentukan banyak solusi bilangan asli (x, y, z) yang memenuhi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$$

(4 poin)

Jawab: $\boxed{49}$

W.L.O.G. (tanpa mengurangi keumuman), misalkan $x \leq y \leq z$ yang berakibat $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$. Maka

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}$$

sehingga $5 \geq x$.

(a). Untuk $x = 5$, maka $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{5}$. Demikian

$$\begin{aligned} \frac{y+z}{yz} &= \frac{2}{5} \\ 5y + 5z &= 2yz && \text{(Kalikan kedua ruas dengan 2)} \\ 10y + 10z &= 4yz \\ 0 &= 4yz - 10y - 10z \\ 25 &= (2y - 5)(2z - 5) \end{aligned}$$

Karena $y \leq z$, maka $2y - 5 \leq 2z - 5$.

- Jika $2y - 5 = 1$ dan $2z - 5 = 25$, maka $(y, z) = (3, 15)$. Karena haruslah $x \leq y$, maka hal ini tidak memenuhi.
- Jika $2y - 5 = 5$ dan $2z - 5 = 5$, maka $(y, z) = (5, 5)$.

Kita dapatkan pasangan $(x, y, z) = (5, 5, 5)$.

(b). Untuk $x = 4$, maka $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{20}$. Demikian

$$\begin{aligned} \frac{y+z}{yz} &= \frac{7}{20} \\ 20y + 20z &= 7yz && \text{(Kalikan kedua ruas dengan 7)} \\ 140y + 140z &= 49yz \\ 0 &= 49yz - 140y - 140z \\ 400 &= (7y - 20)(7z - 20) \end{aligned}$$

Untuk membatasi perhitungan, misalkan $7y - 20 = k$ sehingga $y = \frac{k + 20}{7}$. Demikian haruslah $k + 20 \equiv 0 \pmod{7}$ yang menyimpulkan $k \equiv 1 \pmod{7}$. Karena juga $y \leq z$, maka $7y - 20 \leq 7z - 20$.

- Jika $7y - 20 = 1$ dan $7z - 20 = 400$, maka $y = 3$ dan $z = 60$. Tidak memenuhi karena haruslah $y \leq z$.
- Jika $7y - 20 = 8$ dan $7z - 20 = 50$, maka $y = 4$ dan $z = 10$. Demikian $(x, y, z) = (4, 4, 10)$.

Kita dapatkan pasangan $(x, y, z) = (4, 4, 10)$.

(c). Untuk $x = 3$, maka $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{15}$. Demikian

$$\begin{aligned} \frac{y+z}{yz} &= \frac{4}{15} \\ 15y + 15z &= 4yz && \text{(Kalikan kedua ruas dengan 4)} \\ 60y + 60z &= 16yz \\ 0 &= 16yz - 60y - 60z \\ 225 &= (4y - 15)(4z - 15) \end{aligned}$$

Karena $y \leq z$, maka $4y \leq 4z - 15$. Misalkan $4y - 15 = k$ sehingga $y = \frac{k+15}{4}$. Demikian haruslah $k + 15 \equiv 0 \pmod 4$ yang menyimpulkan $k \equiv 1 \pmod 4$.

- Jika $4y - 15 = 1$ dan $4z - 15 = 225$, maka $y = 4$ dan $z = 60$. Demikian $(x, y, z) = (3, 4, 60)$.
- Jika $4y - 15 = 5$ dan $4z - 15 = 45$, maka $y = 5$ dan $z = 15$. Demikian $(x, y, z) = (3, 5, 15)$.
- Jika $4y - 15 = 9$ dan $4z - 15 = 25$, maka $y = 6$ dan $z = 10$. Demikian $(x, y, z) = (3, 6, 10)$.

Kita dapatkan pasangan $(x, y, z) = (3, 4, 60), (3, 5, 15), (3, 6, 10)$.

(d). Untuk $x = 2$, maka $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10}$. Demikian

$$\begin{aligned} \frac{y+z}{yz} &= \frac{1}{10} \\ 10y + 10z &= yz \\ 0 &= yz - 10y - 10z \\ 100 &= (y - 10)(z - 10) \end{aligned}$$

Karena $y \leq z$, maka $y - 10 \leq z - 10$.

- Jika $y - 10 = 1$ dan $z - 10 = 100$, maka $y = 11$ dan $z = 110$. Demikian $(x, y, z) = (2, 11, 110)$.
- Jika $y - 10 = 2$ dan $z - 10 = 50$, maka $y = 12$ dan $z = 60$. Demikian $(x, y, z) = (2, 12, 60)$.
- Jika $y - 10 = 4$ dan $z - 10 = 25$, maka $y = 14$ dan $z = 35$. Demikian $(x, y, z) = (2, 14, 35)$.
- Jika $y - 10 = 5$ dan $z - 10 = 20$, maka $y = 15$ dan $z = 30$. Demikian $(x, y, z) = (2, 15, 30)$.
- Jika $y - 10 = 10$ dan $z - 10 = 10$, maka $y = 20$ dan $z = 20$. Demikian $(x, y, z) = (2, 20, 20)$.

Kita dapatkan pasangan $(x, y, z) = (2, 11, 110), (2, 12, 60), (2, 14, 35), (2, 15, 30), (2, 20, 20)$.

(e). Untuk $x = 1$, maka $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -\frac{2}{5}$. Karena y, z bilangan asli, berakibat $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0$. Demikian tidak ada pasangan (x, y, z) yang memenuhi.

Jika kita mengabaikan syarat $x \le y \le z$ untuk suatu pasangan (x, y, z), maka banyak pasangan (x, y, z) samadengan banyak permutasinya.

- Banyak permutasi dari pasangan $(5, 5, 5)$ adalah $\frac{3!}{3!} = 1$.
- Banyak permutasi dari pasangan $(4, 4, 10)$ adalah $\frac{3!}{2!1!} = 3$. Demikian juga banyak permutasi dari pasangan $(2, 20, 20)$ adalah 3. Demikian total $2 \times 3 = 6$ pasangan.
- Banyak permutasi dari pasangan $(3, 4, 60)$ adalah $3! = 6$. Demikian juga banyak permutasi dari pasangan-pasangan $(3, 5, 15), (3, 6, 10), (2, 11, 110), (2, 12, 60), (2, 14, 35)$, dan $(2, 15, 30)$ masing-masing ada 6. Demikian total ada $7 \times 6 = 42$ pasangan.

Jadi, banyak pasangan bilangan asli (x, y, z) yang memenuhi adalah $1 + 6 + 42 = \boxed{49}$.

---

18. Tentukan jumlah semua bilangan bulat x sehingga $(x - 6)(x - 9)$ kuadrat sempurna.

(2 poin)

Jawab: $\boxed{\textbf{30}}$

Misalkan $k^2 = (x - 6)(x - 9) = x^2 - 15x + 54$ untuk suatu bilangan bulat k. Kalikan kedua ruas dengan 4.

$$\begin{aligned} 4k^2 &= 4x^2 - 60x + 216 \\ (2k)^2 &= (2x - 15)^2 - 9 \\ 9 &= (2x - 15)^2 - (2k)^2 \\ 9 &= (2x + 2k - 15)(2x - 2k - 15) \end{aligned}$$

- Jika $2x + 2k - 15 = 9$ dan $2x - 2k - 15 = 1$, dengan menjumlahkannya diperoleh $4x - 30 = 10$ yang berarti $4x = 40 \Longrightarrow x = 10$. Hal yang sama untuk $2x + 2k - 15 = 1$ dan $2x - 2k - 15 = 9$.
- Jika $2x + 2k - 15 = 3$ dan $2x - 2k - 15 = 3$, dengan menjumlahkanya diperoleh $4x - 30 = 6$ yang berarti $4x = 36 \Longrightarrow x = 9$.
- Jika $2x + 2k - 15 = -1$ dan $2x - 2k - 15 = -9$, dengan menjumlahkannya diperoleh $4x - 30 = -10$ yang berarti $4x = 20 \Longrightarrow x = 5$. Hal yang sama untuk $2x + 2k - 15 = -9$ dan $2x - 2k - 15 = -1$.
- Jika $2x + 2k - 15 = -3$ dan $2x + 2k - 15 = -3$, dengan menjumlahkannya diperoleh $4x - 30 = -6$ yang berarti $4x = 24 \Longrightarrow x = 6$.

Cek masing-masing nilai x, ternyata memenuhi. Demikian jumlah semua bilangan bulat x yang memenuhi adalah $10 + 9 + 5 + 6 = \boxed{30}$.

---

19. Tentukan bilangan asli k terbesar sehingga $3^{2^{2020}} + 1$ habis dibagi 2^k. **(1 poin)**

Jawab: $\boxed{\textbf{1}}$

Jelas $3^{2^{2020}} + 1$ bernilai genap, sehingga untuk $k = 1$ memenuhi. Tinjau modulo 4. Karena $3 \equiv -1 \pmod 4$, maka

$$3^{2^{2020}} + 1 \equiv (-1)^{2^{2020}} + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4$$

Demikian untuk $k = 2$ tidak memenuhi. Dapat disimpulkan bahwa untuk semua k dengan $k \geq 2$ juga tidak memenuhi. Sehingga bilangan asli k terbesar yang memenuhi adalah $k = \boxed{1}$.

---

20. Tentukan jumlah semua bilangan prima p sehingga terdapat bilangan asli a dengan $a > p$ yang memenuhi

$$\left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3a}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{pa}{p} \right\rfloor = 2020$$

dengan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau samadengan x.

(4 poin)

Jawab: $\boxed{7}$

Kita bagi menjadi dua kasus, ketika p membagi a dan p tidak membagi a.

Kasus 1: p membagi a

Misalkan $a = pk$ untuk suatu bilangan asli k. Jelas bahwa

$$\left\lfloor \frac{ai}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{pki}{p} \right\rfloor = \lfloor ki \rfloor = ki$$

Kita peroleh

$$\begin{aligned} 2020 &= \left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3a}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{pa}{p} \right\rfloor \\ 2^2 \cdot 5 \cdot 101 &= k + 2k + 3k + \cdots + kp \\ &= k(1 + 2 + 3 + \cdots + p) \\ &= k \cdot \frac{p(p+1)}{2} \\ 2^3 \cdot 5 \cdot 101 &= kp(p+1) \end{aligned}$$

Karena p harus habis membagi $2^3 \cdot 5 \cdot 101$, demikian kemungkinan nilai p adalah $p = 2, 5, 101$.

- Jika $p = 2$, maka
$$2^3 \cdot 5 \cdot 101 = k \cdot 2 \cdot 3 \Longrightarrow k = \frac{2^2 \cdot 5 \cdot 101}{3}$$
yang jelas k bukan bilangan bulat. Tidak memenuhi.
- Jika $p = 5$, maka
$$2^3 \cdot 5 \cdot 101 = k \cdot 5 \cdot 6 \Longrightarrow k = \frac{2^2 \cdot 101}{3}$$
yang jelas k bukan bilangan bulat. Tidak memenuhi.
- Jika $p = 101$, maka
$$2^3 \cdot 5 \cdot 101 = k \cdot 101 \cdot 102 \Longrightarrow k = \frac{2^2 \cdot 5}{51}$$

Demikian pada kasus ini tidak ada bilangan prima p yang memenuhi.

Kasus 2: p tidak membagi a

Jelas bahwa $FPB(a,p) = 1$. Karena $FPB(a,p) = 1$, jelas bahwa $\frac{a}{p} \cdot i$ bukan bilangan bulat untuk bilangan bulat i dengan $0 < i < p$. Akibatnya,

$$\left\lfloor \frac{ia}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(p-i)a}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{ia}{p} \right\rfloor + \left\lfloor a - \frac{ia}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{ia}{p} \right\rfloor + a + \left\lfloor \frac{-ia}{p} \right\rfloor = a - 1$$

Misalkan $S = \left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3a}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(p-1)a}{p} \right\rfloor$. Kita peroleh

$$\begin{aligned} S &= \left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3a}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(p-1)a}{p} \right\rfloor \\ S &= \left\lfloor \frac{(p-1)a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(p-2)a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(p-3)a}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor \quad + \\ \hline 2S &= \underbrace{(a-1) + (a-1) + (a-1) + \cdots + (a-1)}_{\text{sebanyak } p-1 \text{ kali}} \\ &= (a-1)(p-1) \\ S &= \frac{(a-1)(p-1)}{2} \end{aligned}$$

Demikian kita peroleh bahwa

$$\left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3a}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(p-1)a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{pa}{p} \right\rfloor = \frac{(a-1)(p-1)}{2} + a = \frac{ap-p+a+1}{2}$$

Kita dapatkan

$$\begin{aligned} 2020 &= \frac{ap-p+a+1}{2} \\ &= \frac{(a-1)(p+1)+2}{2} \\ 2020 &= \frac{(a-1)(p+1)}{2} + 1 \\ 2019 &= \frac{(a-1)(p+1)}{2} \\ 2 \cdot 3 \cdot 673 &= (a-1)(p+1) \end{aligned}$$

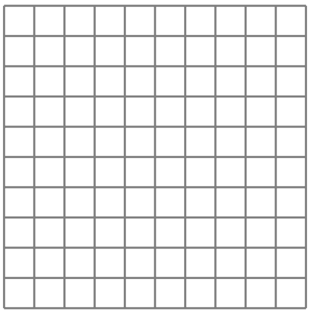
Jelas bahwa $p + 1 \geq 2 + 1 = 3$. Jika $p > 2$, maka haruslah p ganjil.

- Jika $p + 1 = 3$ dan $a - 1 = 1346$, maka $p = 2$ dan $a = 1347$. Demikian untuk p lainnya harus ganjil yang berarti $p + 1$ harus genap.
- Jika $p + 1 = 6$ dan $a - 1 = 673$, maka $p = 5$ dan $a = 674$.
- Jika $p+1 = 2 \cdot 673$ atau $p+1 = 2 \cdot 3 \cdot 673$, maka akan memberikan $a < p$ yang berarti tidak memenuhi.

Jadi, jumlah semua bilangan prima p yang memenuhi adalah $2 + 5 = \boxed{7}$.

---

21. Paman Sam ingin membentuk persegipanjang dimana persegipanjang tersebut memiliki panjang dan lebar yang tidak sama panjang. Sebagai contoh, Paman Sam mau membentuk persegipanjang berukuran 4×5, tetapi tidak mau membentuk persegipanjang berukuran 7×7. Jika Paman Sam ingin membentuk persegipanjang tersebut dari 100 persegi yang kongruen seperti pada gambar di bawah, tentukan banyak persegipanjang yang dapat dibentuk oleh Paman Sam. **(2 poin)**



Jawab: $\boxed{2640}$

Persegipanjang dibentuk dari dua titik yang berada pada garis horizontal dan dua titik yang berada pada garis vertikal. Maka banyak persegipanjang yang terbentuk (termasuk persegi) dari grid 10×10 diatas adalah

$$C_2^{11} \times C_2^{11} = \frac{11!}{2!9!} \times \frac{11!}{2!9!} = 55 \times 55 = 3025$$

Sedangkan, banyak persegi dari grid 10×10 tersebut adalah

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \frac{10(10+1)(2 \times 10 + 1)}{6} = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$$

Demikian banyak persegipanjang yang dapat dibentuk oleh Paman Sam adalah $3025 - 385 = \boxed{2640}$.

---

22. Misalkan semua pasangan bilangan bulat (a, b, c) yang memenuhi persamaan

$$\begin{aligned} a + b &= 15 \\ ab + c &= 72 \\ ac &= 108 \end{aligned}$$

adalah $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), \cdots, (a_n, b_n, c_n)$. Tentukan nilai

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n - (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$

(3 poin)

Jawab: $\boxed{42}$

Karena $a + b = 15$, maka $ab \leq 56$. Demikian

$$c = 72 - ab \geq 72 - 56 = 16$$

Tinjau $ac = 108 = 2^2 \cdot 3^3$.

- Jika $c = 18$, maka $a = 6$. Karena $a + b = 15$, diperoleh $b = 9$. Cek pada $ab + c = 6 \cdot 9 + 18 = 72$ yang berarti memenuhi. Kita dapatkan $(a, b, c) = (6, 9, 18)$.
- Jika $c = 27$, maka $a = 4$. Karena $a + b = 15$, diperoleh $b = 11$. Cek pada $ab + c = 4 \cdot 11 + 27 = 71$ yang berarti tidak memenuhi.
- Jika $c = 36$, maka $a = 3$. Karena $a + b = 15$, diperoleh $b = 12$. Cek pada $ab + c = 3 \cdot 12 + 36 = 72$ yang berarti memenuhi. Kita dapatkan $(a, b, c) = (3, 12, 36)$.
- Jika $c = 54$, maka $a = 2$. Karena $a + b = 15$, diperoleh $b = 13$. Cek pada $ab + c = 2 \cdot 13 + 54 = 80$ yang berarti tidak memenuhi.

- Jika $c = 108$, maka $a = 1$. Karena $a + b = 15$, diperoleh $b = 14$. Cek pada $ab + c = 1 \cdot 14 + 108 = 122$ yang berarti tidak memenuhi.

Kita dapatkan $(a, b, c) = (6, 9, 18), (3, 12, 36)$. Demikian

$$a_1+a_2+\cdots+a_n-(b_1+b_2+\cdots+b_n)+c_1+c_2+\cdots+c_n = 6+3-(9+12)+18+36 = 9-21+54 = \boxed{42}$$

---

23. Misalkan S adalah jumlah semua bilangan real x yang memenuhi

$$7 = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + 7}}}}}$$

Tentukan nilai $\lfloor S \rfloor$ dimana $\lfloor S \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan S. **(3 poin)**

Jawab: $\boxed{\mathbf{42}}$

Perhatikan bahwa persamaan soal ekuivalen dengan

$$7 = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}}}$$

Dengan menguadratkan kedua ruas, kita dapatan

$$\begin{aligned}
49 &= x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}}} \\
49 &= x + 7 \\
42 &= x
\end{aligned}$$

Demikian $S = 42$ yang berarti $\lfloor S \rfloor = \boxed{42}$.

---

24. Tentukan banyak bilangan bulat x sehingga

$$\sqrt[4]{\left(x^2 + 4x + 3\right)x^2 - 4\left(x^2 + 4x + 3\right)x + 3\left(x^2 + 4x + 3\right) + 16}$$

bilangan bulat. **(4 poin)**

Jawab: $\boxed{\mathbf{6}}$

Misalkan

$$k = \sqrt[4]{\left(x^2 + 4x + 3\right)x^2 - 4\left(x^2 + 4x + 3\right)x + 3\left(x^2 + 4x + 3\right) + 16}$$

dengan k bilangan bulat tak negatif. Dengan menyederhakan bentuk tersebut,

$$\begin{aligned}
k &= \sqrt[4]{\left(x^2 + 4x + 3\right)x^2 - 4\left(x^2 + 4x + 3\right)x + 3\left(x^2 + 4x + 3\right) + 16} \\
&= \sqrt[4]{\left(x^2 + 4x + 3\right)\left(x^2 - 4x + 3\right) + 16} \\
k &= \sqrt[4]{(x+1)(x+3)(x-1)(x-3) + 16}
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} k^4 &= (x-3)(x-1)(x+1)(x+3)+16 \\ &= (x-3)(x+3)\cdot(x-1)(x+1)+16 \\ &= \left(x^2-9\right)\left(x^2-1\right)+16 \\ &= x^4-10x^2+9+16 \\ &= x^4-10x^2+25 \\ k^4 &= \left(x^2-5\right)^2 \\ \pm k^2 &= x^2-5 \end{aligned}$$

Kasus 1: $k^2 = x^2 - 5$

Kita peroleh bahwa $x^2 - k^2 = 5$ yang ekuivalen dengan

$$(x+k)(x-k) = 5$$

- Jika $x + k = 5$ dan $x - k = 1$, dengan menjumlahkannya diperoleh $2x = 6$ yang berarti $x = 3$. Demikian $k = 2$ (memenuhi).
- Jika $x + k = 1$ dan $x - k = 5$, dengan menjumlahkannya diperoleh $2x = 6$ yang berarti $x = 3$. Demikian $k = -2$ (tidak memenuhi).
- Jika $x + k = -1$ dan $x - k = -5$, dengan menjumlahkannya diperoleh $2x = -6$ yang berarti $x = -3$. Demikian $k = 2$ (memenuhi).
- Jika $x + k = -5$ dan $x - k = -1$, dengan menjumlahkannya diperoleh $2x = -6$ yang berarti $x = -3$. Demikian $k = -2$ (tidak memenuhi).

Demikian pada kasus ini nilai x yang memenuhi adalah $x = 3$ atau $x = -3$.

Kasus 2: $-k^2 = x^2 - 5$

Kita peroleh bahwa $k^2 + x^2 = 5$. Tinjau bahwa $k^2 \geq 0$ dan $x^2 \geq 0$. Karena x dan k bilangan bulat, hal ini akan dipenuhi ketika $k^2 = 4$ dan $x^2 = 1$ atau $k^2 = 1$ dan $x^2 = 4$. Sehingga kita peroleh pasangan (x, k) yang memenuhi adalah

$$(x,k) = (1,2), (-1,2), (2,1), (-2,1)$$

Sehingga pada kasus ini nilai x yang memenuhi adalah $x = 1, -1, 2, -2$.

Semua nilai x yang memenuhi adalah $x = -3, -2, -1, 1, 2, 3$ yang berarti ada $\boxed{6}$.

---

25. Tentukan banyak pasangan bilangan asli (a, b) sehingga $a + 1$ habis membagi $2b - 1$ dan $b + 1$ habis membagi $2a - 1$. **(3 poin)**

Jawab: $\boxed{3}$

Karena $a + 1$ habis membagi $2b - 1$, misalkan $2b - 1 = (a + 1)x$ untuk suatu bilangan asli x. Karena $b + 1$ habis membagi $2a - 1$, misalkan $2a - 1 = (b + 1)y$. Tinjau bahwa

$$xy = \frac{2b-1}{a+1}\cdot\frac{2a-1}{b+1} = \frac{2a-1}{a+1}\cdot\frac{2b-1}{b+1}$$

Jelas bahwa $2a - 1 < 2a + 2$ yang berarti $2a - 1 < 2(a + 1)$. Demikian

$$\frac{2a-1}{a+1} < 2$$

Dengan cara yang sama, diperoleh $\frac{2b-1}{b+1} < 2$ Kita dapatkan

$$xy = \frac{2a-1}{a+1} \cdot \frac{2b-1}{b+1} < 2 \cdot 2 = 4$$

Demikian $xy < 4$. Karena x, y bilangan asli, maka kemungkinan nilai xy adalah $xy = 1, xy = 2$, atau $xy = 3$.

- Jika $xy = 1$, maka haruslah $x = y = 1$. Demikian $2a - 1 = b + 1 \implies 2a - b = 2$ dan $2b - 1 = a + 1 \implies 2b - a = 2$. Dengan mengeliminasi kedua persamaan tersebut, diperoleh bahwa $a = b = 2$. Demikian $(a, b) = (2, 2)$. Cek kembali, memenuhi.
- Jika $xy = 2$, maka haruslah $x = 2$ dan $y = 1$ (atau kebalikannya, $x = 1$ dan $y = 2$). Demikian $2a - 1 = 2b + 2 \implies 2a - 2b = 3$, tidak mungkin. Karena $2a - 2b$ haruslah bilangan genap, sedangkan 3 bilangan ganjil.
- Jika $xy = 3$, maka haruslah $x = 3$ dan $y = 1$ (atau kebalikannya, $x = 1$ dan $y = 3$). Demikian $2a - 1 = 3b + 3 \implies 2a - 3b = 4$ dan $2b - 1 = a + 1 \implies 2b - a = 2$. Dengan mengeliminasi, kita peroleh $a = 14$ dan $b = 8$. Kita dapatkan $(a, b) = (14, 8)$. Demikian juga $(a, b) = (8, 14)$ merupakan solusi.

Demikian semua pasangan bilangan asli (a, b) yang memenuhi adalah $(2, 2), (14, 8)$, dan $(8, 14)$ yang berarti ada $\boxed{3}$.

---

26. Seekor semut berada di titik $(5, 26)$ ingin menuju ke titik $(-7, 6)$. Semut tersebut berjalan dengan kecepatan konstan selama 1 jam. Berapa lama (dalam menit) waktu yang dibutuhkan semut tersebut untuk melewati sumbu-y? **(2 poin)**

Jawab: $\boxed{\mathbf{25}}$

Misalkan ℓ adalah garis yang melalui titik $A(5, 26)$ dan $B(-7, 6)$. Maka persamaan garis ℓ:

$$\begin{aligned}
\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\
\frac{y - 6}{26 - 6} &= \frac{x - (-7)}{5 - (-7)} \\
\frac{y - 6}{20} &= \frac{x + 7}{12} && \text{(Kalikan kedua ruas dengan 20)} \\
y - 6 &= \frac{5x + 35}{3} \\
y &= \frac{5x + 35}{3} + 6 \\
y &= \frac{5x + 53}{3} \\
y &= \frac{5}{3}x + \frac{53}{3}
\end{aligned}$$

Demikian semut tersebut melewati sumbu-y di titik $C\left(0, \frac{53}{3}\right)$. Misalkan waktu yang dibutuhkan dari A ke C adalah t menit. Tinjau bahwa

$$|AC| = \sqrt{(5-0)^2 + \left(26 - \frac{53}{3}\right)^2} = \sqrt{5^2 + \frac{25^2}{3^2}} = \sqrt{\frac{15^2 + 25^2}{3^2}} = \sqrt{\frac{850}{3^2}} = \frac{5}{3}\sqrt{34}$$

dan juga

$$|BC| = \sqrt{(0-(-7))^2 + \left(\frac{53}{3} - 6\right)^2} = \sqrt{7^2 + \frac{35^2}{3^2}} = \sqrt{\frac{21^2 + 35^2}{3^2}} = \sqrt{\frac{1666}{3^2}} = \frac{7}{3}\sqrt{34}$$

Maka kita dapatkan bahwa $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{5}{7}$ yang berarti $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{5}{12}$. Karena $|AC| = \frac{5}{12}|AB|$ dan lama perjalanan semut adalah 1 jam = 60 menit, maka

$$t = \frac{5}{12} \cdot 60 \text{ menit } = 25 \text{ menit}$$

Jadi, semut tersebut melewati sumbu-y selama $\boxed{25}$ menit.

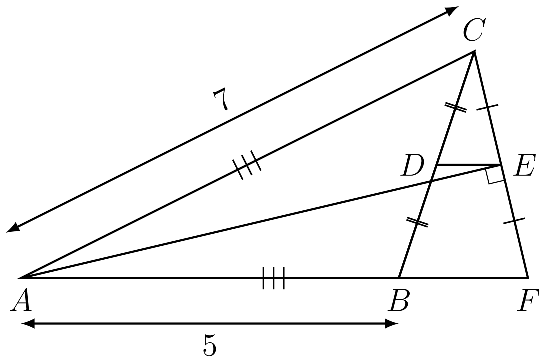
---

27. Diberikan $\triangle ABC$ dengan panjang $BC = 4, AC = 7$, dan $AB = 5$. Titik D merupakan titik tengah BC. Misalkan E terletak pada garis bagi $\angle BAC$ sehingga CE tegak lurus terhadap garis bagi tersebut. Tentukan panjang DE. $\boxed{1}$ **(2 poin)**

Jawab: $\boxed{\mathbf{1}}$

Misalkan perpanjangan CE memotong perpanjangan AB di F. Karena $AB^2+BC^2 < AC^2$, maka $\triangle ABC$ tumpul di B. Demikian E terletak diluar $\triangle ABC$.

Perhatikan bahwa AE merupakan garis bagi $\angle FAC$ pada $\triangle AFC$. Tinjau bahwa $\angle FAE = \angle EAC$ sehingga



$$\angle ACE = 90^\circ - \angle EAC = 90^\circ - FAE = \angle ABF$$

yang dapat disimpulkan bahwa panjang $AF = AC$. Karena panjang $AC = 7$, demikian panjang $AF = 7$. Kita tahu bahwa panjang $AB = 5$ yang berarti panjang $BF = 2$.

Tinjau bahwa karena panjang $AF = AC$ dan $AE \perp FC$, maka panjang $FE = EC$. Demikian E titik tengah FC. Karena D juga titik tengah BC, demikian DE sejajar dengan BF. Demikian $\triangle CBF$ sebangun dengan $\triangle CDE$. Maka kita peroleh bahwa

$$\frac{DE}{BF} = \frac{CE}{CF} = \frac{1}{2}$$

yang berarti

$$DE = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Jadi, panjang DE adalah $\boxed{1}$.

---

28. Sebanyak 2020 pintu telah dinomori dari 1 sampai 2020 (setiap pintu memiliki satu nomor) diaktifkan melalui sebuah tombol. Pintu tersebut beroperasi terbuka atau tertutup untuk setiap penekanan tombol. Jika pintu terbuka, maka pintu akan tertutup setelah penekanan tombol tersebut, begitu pula sebaliknya. Jika tombol tersebut itu telah ditekan sebanyak k kali, maka pintu yang bernomor kelipatan k akan aktif. `Robot A` dan `Robot B` sedang bermain sebuah game. `Robot A` sebagai penekan tombol dan `Robot B` memilih sebuah pintu secara acak lalu masuk ke ruangan sesuai nomor pintu yang dipilih. `Robot A` dikatakan menang jika `Robot A` menekan tombol sebanyak k, pintu yang dipilih `Robot B`

dalam kondisi tertutup. `Robot A` menekan tombol sebanyak 2020 kali dan mula-mula semua pintu tertutup. Peluang `Robot A` memenangkan permainan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana a dan b bilangan asli dengan $FPB(a, b) = 1$, tentukan nilai $a + b$.

(2 poin)

Jawab: $\boxed{999}$

Kita gunakan komplemen dengan mengasumsikan `Robot A` kalah, yaitu ketika pintu yang dipilih Jilan dalam kondisi terbuka setelah penekanan sebanyak k kali. Agar setelah 2020 penekanan tombol pintu `Robot B` terbuka, maka pintu `Robot B` harus terbuka (atau diaktifkan) sebanyak ganjil. Demikian haruslah nomor pintu yang dipilih memiliki faktor positif sebanyak ganjil. Misalkan nomor pintu tersebut adalah $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_i^{a_i}$ dengan $p_1, p_2, \cdots, p_i$ bilangan prima yang berbeda dan $a_1, a_2, \cdots, a_i$ bilangan asli. Demikian banyak faktor positif dari n haruslah ganjil, dengan kata lain

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_i + 1)$$

haruslah bilangan ganjil. Kondisi ini terpenuhi jika $a_1, a_2, \cdots, a_i$ masing-masing bernilai genap. Demikian n haruslah kuadrat sempurna. Bilangan kuadrat sempurna dari 1 sampai 2020 adalah $1^2, 2^2, \cdots, 44^2$ yang berarti ada sebanyak 44. Demikian peluang `Robot A` kalah pada permaian tersebut adalah $\frac{44}{2020} = \frac{11}{505}$. Sehingga peluang `Robot A` memenangkan permainan tersebut adalah

$$1 - \frac{11}{505} = \frac{494}{505}$$

yang berarti $a = 494$ dan $b = 505$. Demikian $a + b = 494 + 505 = \boxed{999}$.

---

29. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat tak negatif (a, b, c, d, e) dengan $a \geq 2, b \geq 5$, dan $a + b + c + d + e = 11$. **(1 poin)**

Jawab: $\boxed{70}$

Misalkan $a = a' + 2$ dan $b = b' + 5$ dengan a', b' bilangan bulat tak negatif. Karena $a + b + c + d + e = 11$, maka

$$a' + 2 + b' + 5 + c + d + e = 11 \Longrightarrow a' + b' + c + d + e = 4$$

Demikian banyak pasangan bilangan bulat tak negatif (a, b, c, d, e) adalah

$$C_{5-1}^{4+5-1} = C_4^8 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \boxed{70}$$

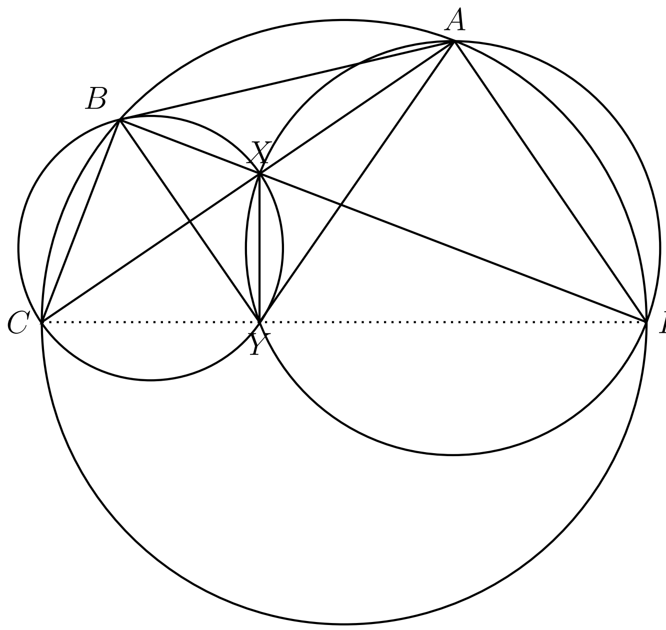
---

30. Diketahui segiempat talibusur $ABCD$ dengan X merupakan titik potong antara AC dan BD. Misalkan Y adalah perpotongan lingkaran luar segitiga AXD dan BXC yang berbeda dengan X sehingga X adalah titik pusat lingkaran dalam segitiga ABY. Diketahui panjang $BC = 5, CD = 13$, dan $AD = 11$. Jika panjang AB dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a\sqrt{b} - c}{d}$ dimana a, b, c, d bilangan asli, tidak ada bilangan kuadrat sempurna yang habis membagi b kecuali 1 dan $FPB(a, c, d) = 1$, tentukan nilai dari $a + b + c + d$.

(4 poin)

Jawab: $\boxed{119}$

Karena X merupakan titik pusat lingkaran dalam segitiga ABY, maka X merupakan titik bagi[‡] $\triangle ABY$.



Misalkan $\angle BAY = 2\alpha$ yang berakibat $\angle BAX = \angle XAY = \alpha$. Karena $ABCD$ segiempat talibusur, berakibat $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$. Tinjau juga karena $AXYD$ segiempat talibusur, berakibat $\angle XDY = \angle XAY = \alpha$. Tinjau B, X, D segaris. Karena $\angle XDY = \angle BDC = \alpha$, demikian haruslah C, Y, D segaris. Karena X titik bagi $\triangle ABY$, berakibat

$$\angle BXY = 90^\circ + \frac{\angle BAY}{2} = 90^\circ + \alpha$$

Karena $XYCB$ segiempat talibusur, maka

$$\angle YCB = 180^\circ - \angle BXY = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha$$

Karena $\angle DCB = \angle YCB = 90^\circ - \alpha$ dan $\angle CDB = \alpha$, maka $\angle CBD = 90^\circ$. Karena $ABCD$ segiempat talibusur, maka $\angle CAD = \angle CBD = 90^\circ$ jika dan hanya jika CD diameter lingkaran luar segiempat $ABCD$. Diketahui panjang $BC = 5, CD = 13$, dan $AD = 11$. Dari $\triangle CDB$, dengan phytagoras

$$BD = \sqrt{CD^2 - CB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

Dan juga dari $\triangle ACD$, dengan phytagoras

$$AC = \sqrt{CD^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 11^2} = \sqrt{169 - 121} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Menurut *Ptolemy's Theorem*,

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + BC \cdot AD &= AC \cdot BD \\ 13AB + 5 \cdot 11 &= 4\sqrt{3} \cdot 12 \\ 13AB &= 48\sqrt{3} - 55 \\ AB &= \frac{48\sqrt{3} - 55}{13} \end{aligned}$$

[‡]Titik bagi suatu segitiga adalah titik perpotongan ketiga garis bagi segitiga tersebut.

Demikian $a = 48, b = 3, c = 55$, dan $d = 13$. Demikian

$$a + b + c + d = 48 + 3 + 55 + 13 = \boxed{119}$$